

# 2019年天津河东区高三一模理科数学试卷

## 一、选择题（本大题共8题，每小题3分，共计24分）

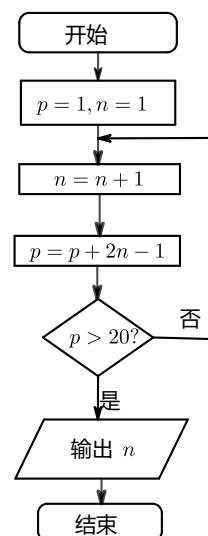
1. 已知 $i$ 是虚数单位,  $x \in \mathbf{R}$ , 复数 $z = (x + i)(2 + i)$ 为纯虚数, 则 $2x - i$ 的模等于 ( ).

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 2

2. 已知 $x, y$ 满足不等式组 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ , 则 $z = x + 3y$ 的最小值等于 ( ).

- A. 3                      B. 6                      C. 9                      D. 12

3. 若某程序框图如图所示, 则输出的 $n$ 的值是 ( ).



- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

4. 设 $x \in \mathbf{R}$ , 则 " $1 < x < 2$ " 是 " $|x - 2| < 1$ " 的 ( ).

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

5. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上递减, 则 $a = f(1)$ ,  $b = f\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\right)$ ,  $c = f\left(\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的大小关系是 ( ).

- A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $b > a > c$                       D.  $c > a > b$

6. 为了得到函数 $y = 3 \cos 2x$ 图象, 只需把函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点 ( ).

- A. 向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度                      B. 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度  
C. 向左平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度                      D. 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

7. 已知 $F_1, F_2$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 $F_2$ 与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线另一条渐近线于点 $M$ ，若点 $M$ 在以线段 $F_1F_2$ 为直径的圆外，则双曲线离心率的取值范围是 ( ) .

A.  $(1, \sqrt{2})$       B.  $(\sqrt{3}, +\infty)$       C.  $(\sqrt{3}, 2)$       D.  $(2, +\infty)$

8. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$ ，当 $x \in [0, 2)$ 时， $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, 1), \\ -(\frac{1}{2})^{|x-\frac{3}{2}|}, & x \in [1, 2), \end{cases}$  若当 $x \in [-4, -2)$ 时，函数 $f(x) \geq \frac{t^2}{4} - t + \frac{1}{2}$ 恒成立，则实数 $t$ 的取值范围为 ( )

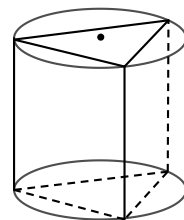
A.  $2 \leq t \leq 3$       B.  $1 \leq t \leq 3$       C.  $1 \leq t \leq 4$       D.  $2 \leq t \leq 4$

## 二、填空题 (本大题共6题，每小题3分，共计18分)

9. 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x \leq 0\}$ ，则 $A \cap B =$  \_\_\_\_\_ .

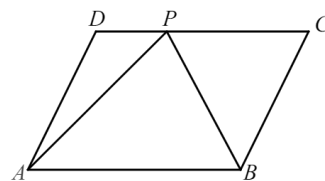
10. 若 $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^n$ 的二项展开式中各项的二项式系数之和是64，则展开式中的常数项为 \_\_\_\_\_ . (用数字作答)

11. 如图，圆柱内有一个直三棱柱，三棱柱的底面在圆柱底面内，且底面是正三角形. 如果三棱柱的体积为 $12\sqrt{3}$ ，圆柱的底面直径与母线长相等，则圆柱的侧面积为 \_\_\_\_\_ .



12. 某工程队有5项工程需要单独完成，其中工程乙必须在工程甲完成后才能进行，工程丙必须在工程乙完成后立即进行，那么安排这5项工程的不同排法种数是 \_\_\_\_\_ . (用数字作答)

13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 8$ ， $AD = 5$ ， $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$ ， $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是 \_\_\_\_\_ .



14. 若实数 $x, y$ 满足 $2\cos^2(x+y-1) = \frac{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 2xy}{x+y+1}$ ，则 $xy$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ .

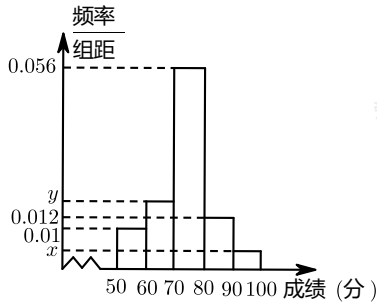
三、解答题（本大题共6题，共计58分）

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$ ， $f(x) = 2\sin(x - A)\cos x + \sin(B + C)$  ( $x \in \mathbf{R}$ )，函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称.
- (1) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，求 $f(x)$ 的值域.
- (2) 若 $a = 7$ 且 $\sin B + \sin C = \frac{13\sqrt{3}}{14}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 某学校高一年级学生某次身体素质体能测试的原始成绩采用百分制，已知所有这些学生的原始成绩均分布在 $[50, 100]$ 内，发布成绩使用等级制. 各等级划分标准见表. 规定： $A, B, C$ 三级为合格等级， $D$ 为不合格等级.

| 百分制 | 85及以上 | 70分到 84分 | 60分到 69分 | 60分以下 |
|-----|-------|----------|----------|-------|
| 等级  | $A$   | $B$      | $C$      | $D$   |

为了解该校高一年级学生身体素质情况，从中抽取了 $n$ 名学生的原始成绩作为样本进行统计. 按照 $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$ 的分组作出频率分布直方图如图1所示，样本中分数在80分及以上的所有数据的茎叶图如图2所示.

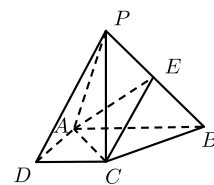


| 茎 | 叶           |
|---|-------------|
| 8 | 0 1 2 3 4 7 |
| 9 | 5 8         |

图 2

- (1) 求 $n$ 和频率分布直方图中的 $x, y$ 的值.
- (2) 根据样本估计总体的思想，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，若在该校高一学生中任选3人，求至少有1人成绩是合格等级的概率.
- (3) 在选取的样本中，从 $A, C$ 两个等级的学生中随机抽取了3名学生进行调研，记 $\xi$ 表示所抽取的3名学生中为 $C$ 等级的学生人数，求随机变量 $\xi$ 的分布列及数学期望.

17. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PC \perp$  底面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2AD = 2CD$ ， $PC = 4$ ， $E$  为线段  $PB$  上一点。



(1) 求证：平面  $EAC \perp$  平面  $PBC$ 。

(2) 若二面角  $P-AC-E$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求  $\frac{BE}{BP}$  的值。

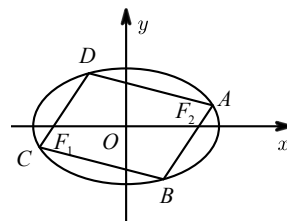
18. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $d = 2$ ,  $a_2$ 是 $a_1$ 与 $a_4$ 的等比中项.

( 1 ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

( 2 ) 若数列 $\{b_n\}$ 满足:  $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1}$ , 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

( 3 ) 令 $c_n = \frac{a_n b_n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

19. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的短轴的一个顶点与两个焦点构成正三角形，且该三角形的面积为  $\sqrt{3}$ .



(1) 求椭圆  $C$  的方程.

(2) 设  $F_1, F_2$  是椭圆  $C$  的左右焦点，若椭圆  $C$  的一个内接平行四边形的一组对边过点  $F_1$  和  $F_2$ ，求这个平行四边形的面积最大值.

20. 已知  $f(x) = mx - a \ln x - m$ ,  $g(x) = \frac{ex}{e^x}$ , 其中  $m, a$  均为实数.

(1) 求  $g(x)$  的极值.

(2) 设  $m = 1, a = 0$ , 求证对  $\forall x_1, x_2 \in [3, 4] (x_1 \neq x_2)$ ,  $|f(x_2) - f(x_1)| < \left| \frac{ex_2}{a(x_2)} - \frac{ex_1}{g(x_1)} \right|$  恒成立.

(3) 设  $a = 2$ , 若对  $\forall$  给定的  $x_0 \in (0, e]$ , 在区间  $(0, e]$  上总存在  $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$  使得  $f(t_1) = f(t_2) = g(x_0)$  成立, 求  $m$  的取值范围.